$\mathfrak{gl}(\mathbb{R})$ jornadas de geometría diferencial y teoría de Lie

ROSARIO - 2017

En el marco de los 50 años de la Licencitura en Matemática de la UNR

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Universidad Nacional de Rosario

Rosario, 31 de agosto y 1 de septiembre de 2017

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

50 aniversario LICENCIATURA en MATEMÁTICA 1967 FCEIA - UNR 2017

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO | UNR

PROGRAMA

Jueves 31 de agosto. - Aula 33, FCEIA

14:30 a 14:40: Apertura

14:40 a 15:10: Mauro **Subils** (FCEIA-UNR), *Álgebras de Heisenberg asociadas a álgebras de división y las álgebras de Lie simples.*

15:20 a 15:50: Marcos **Melo** (UFC-Fortaleza, Ceara, Brasil), *The Fundamental Theorem of Curves and Submanifolds.*

16:00 a 16:30: COFFEE BREAK

16:30 a 17:00: Charla para estudiantes a cargo de Gabriela **Ovando** (UNR), *Acciones, geometría y modelos topológicos.*

17:10 a 17:40: Romina **Arroyo** (FAMAF-UNC), *El comportamiento asintótico del flujo pluriclosed en grupos de Lie.*

20:30: CENA informal en lugar a confirmar.

Viernes 1 de septiembre. - Aula 33, FCEIA

9:30 a 10:00: Isolda **Cardoso** (FCEIA-UNR), *Sobre el operador $L + \alpha|T|$ en el grupo de Heisenberg.*

10:10 a 10:40: Edison **Fernandez Culma** (FAMAF-UNC), *Geometría anti-Kahler sobre grupos de Lie.*

10:40 a 11:10: COFFEE BREAK

11:10 a 11:40: Vanesa **Meinardi** (UNVM), *Álgebras conformes cuánticas.*

11:50 a 12:20: Raúl **Vidal** (FAMAF-UNC), *Un problema de evolución en el grupo de Heisenberg.*

12:30 a 14:30: ALMUERZO DE CAMARADERÍA en restaurant de la zona.

14:40 a 15:10: Pablo **Montenegro** (FCEIA-UNR), *Geodésicas luz en variedades lorentzianas compactas.*

15:20 a 15:50: Marina **Nicolini** (FAMAF-UNC), *G_2-estructuras solitones en álgebras de Lie nilpotentes.*

16:00 a 16:30: COFFEE BREAK

16:30 a 17:00: Marcos **Origlia** (FAMAF-UNC), *Álgebras de Lie con estructuras Vaisman.*

17:10 a 17:40: Guillermo **Henry** (FCEyN-UBA), *Soluciones Equivariantes de la Ecuación de Yamabe.*

CRONOGRAMA

Hora	Jueves 31-08	Viernes 01-09
9:30 - 10:00		CARDOSO
10:10 - 10:40		FERNANDEZ CULMA
10:40 - 11:10		**COFFEE BREAK**
11:10 - 11:40		MEINARDI
11:50 - 12:20		VIDAL
12:30 - 14:30		**ALMUERZO**
14:40 - 15:10	SUBILS	MONTENEGRO
15:20 - 15:50	FERREIRA DE MELO	NICOLINI
16:00 - 16:30	**COFFEE BREAK**	**COFFEE BREAK**
16:30 - 17:00	OVANDO	ORIGLIA
17:10 - 17:40	ARROYO	HENRY

ABSTRACTS

El comportamiento asintótico del flujo pluriclosed en grupos de Lie.

Romina M. Arroyo

FaMAF – UNC
CIEM – CONICET

El *flujo pluriclosed* es un flujo geométrico que evoluciona estructuras Hermitianas pluriclosed (i.e. estructuras Hermitianas para las cuales su 2-forma fundamental satisface $\partial\bar{\partial}\omega = 0$) en una variedad compleja dada. El objetivo de esta charla es discutir el comportamiento asintótico del flujo pluriclosed en el caso de estructuras invariantes a izquierda en grupos de Lie. Más precisamente, estructuras invariantes en nilvariedades y solvariedades. Analizaremos el flujo y explicaremos cómo una normalización adecuada del flujo converge a *pluriclosed–solitones*, que son soluciones autosimilares del flujo.

Este trabajo es un trabajo en conjunto con Ramiro Lafuente (Universidad de Münster).

Sobre el operador $L + \alpha|T|$ en el grupo de Heisenberg.

Isolda E. Cardoso

FCEIA – UNR

Sea $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, T\}$ la base canónica del álgebra de Lie asociada al grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_n$ y sea $L = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + Y_j^2$ el sublaplaciano. A través de la transformada esférica en el par de Gelfand $(\mathbb{H}_n, U(n))$ definimos el operador pseudodiferenciable $|T|$ según

$$|T|f(z,t) = \sum_{k\geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|(f * \varphi_{\lambda,k})(z,t)|z|^n dz,$$

donde $\{\varphi_{\lambda,k}\}_{\lambda\in\mathbb{R},k\in\mathbb{N}}$ es la familia de funciones esféricas. Tal operador no es un elemento del álgebra universal envolvente, luego tampoco lo será el operador $A_\alpha = L_\alpha = L + \alpha|T|$, para un escalar α. El problema que planteamos involucra el cálculo de una *solución fundamental* y su fórmula explícita. Para esto necesitamos definir adecuadamente qué entenderemos por solución fundamental, probar existencia y calcularla explícitamente. Nos proponemos dos caminos posibles, a saber:

- **Vía transformada esférica en $\mathbb{H}_n$**: podríamos adaptar el método desarrollado en [G-S] para proponer y calcular explícitamente una solución fundamental, dicho método es versátil y ya fue adaptado en [C-S] para otros casos, en particular para el operador $L_\alpha = L + i\alpha T$.
- **Vía transformada de Fourier en el centro de $\mathbb{H}_n$**: puesto que la "diferencia" entre los operadores A_α y L_α parece ser un signo, podríamos utilizar la conocida relación entre las transformadas de Fourier y Hilbert $\mathcal{F}(\mathcal{H}f)(\xi) = -i\mathrm{sgn}(\xi)\mathcal{F}f(\xi)$ para escribir la solución fundamental desconocida en términos de la conocida.

Presentaremos brevemente los avances en cada dirección, las dificultades encontradas y discutiremos sobre los pasos a seguir.

REFERENCIAS:

[G-S] T. Godoy, L. Saal, *On the relative fundamental solutions for a second order differential operator on the Heisenberg group*, Stud. Math., 2001, vol 145 nro 2, 143-164.

[C-S] I. Cardoso, L. Saal, *Explicit fundamental solutions of some second order differential operators on Heisenberg groups*, Colloq. Math., 2012, 129, 263-288.

Geometría Anti-Kähler sobre grupos de Lie

Edison Alberto Fernández-Culma & Yamile Godoy

FaMAF – UNC
CIEM – CONICET

Sea (M^{2n}, J) una variedad casi compleja. Una *métrica anti-Hermitiana* sobre (M, J) es una métrica pseudo-Riemanniana g de M tal que:

$$g(JX, JY) \quad = \quad -g(X, Y), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M);$$

esto último es equivalente a que J sea simétrica para la g e implica que la métrica tiene signatura neutra (n, n). Si adicionalmente, la estructura compleja J es paralela $((\nabla^g J) \equiv 0)$, entonces se dice que (M, g, J) es una *variedad anti-Kähler* (también conocida en la literatura como *variedad Norden-Kähler*).

Con el fin de descubrir/encontrar/motivar nuevas propiedades de la mencionada geometría, en nuestro trabajo nos enfocamos en estudiar la geometría (invariante a izquierda) anti-Kähler de los grupos de Lie. En la charla, daremos algunas caracterizaciones de estructura anti-Kähler dependiendo si se tiene una estructura compleja *bi-invariante* ó *abeliana* en el grupo de Lie y mencionaremos algunos resultados que hemos obtenido al estudiar cada caso: como por ejemplo que las estructuras anti-Kähler (invariantes a izquierda) sobre grupos de Lie con estructura compleja abeliana son *flat* con respecto a su conexión de Levi-Civita.

Haciendo uso de una 3-forma que asociamos a esta geometría en el caso de grupos de Lie, resolvemos el problema de determinar cuáles grupos de Lie de dimensión 4 admiten una estructura anti-Kähler (sin hacer uso de clasificaciones previas de grupos de Lie admitiendo estructuras complejas). Por último, estudiamos el problema de encontrar cuántas estructuras anti-Kähler admiten los grupos de Lie determinados anteriormente (salvo *equivalencia*).

The Fundamental Theorem of Curves and Submanifolds

Marcos Melo

U.F. do Ceara - Brasil

In this talk we will discuss the Fundamental Theorem of Submanifolds. Starting with the case of curves in Euclidean Space, we will talk about the necessary and sufficient conditions which guarantee their existence and uniqueness, which are related to the well known Frenet's equations. Then, we will consider the case of submanifolds in some Space Form (i.e., Euclidean Space, Sphere or Hyperbolic Space), and see that Gauss, Codazzi and Ricci equations guarantee their existence and uniqueness. Finally, we will show that if the target ambient is not a Space Form, then Gauss, Codazzi and Ricci equations may not be sufficient, and to illustrate that we will consider some target spaces such as Lie groups and warped products.

Soluciones Equivariantes de la Ecuación de Yamabe.

Guillermo Henry

FCEyN – UBA
CONICET

Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana compacta de dimensión $n \geq 3$. Una función u es solución de la ecuación de Yamabe de (M, g) si satisface para alguna constante c la ecuación

$$a_n \Delta_g u + s_g u = c|u|^{\frac{4}{n-2}} u,$$

donde a_n es una constante dimensional y s_g es la curvatura escalar de (M, g). Las soluciones positivas de esta ecuación inducen métricas de curvatura escalar constante en la clase conforme de la métrica g. Una manera natural de generalizar este problema es la siguiente. Dado G un subgrupo compacto de isometías de (M, g), ¿Es posible encontrar una solución positiva invariantes por el grupo G? Este se conoce como el problema equivariante de Yamabe. En esta charla, discutiremos la existencia de soluciones invariantes por subgrupos de isometrías, en particular, nos centraremos en aquellas que cambian de signo. Los resultados de esta charla son un trabajo en colaboración con Farid Madani.

Algebras conformes cuánticas.

Vanesa Meinardi[a,b] & Carina Boyallian[b]

a UN Villa María - *b* FAMAF – UNC
CIEM – CONICET

En el campo general de las álgebras de vértices, un problema fundamental ha sido la de establecer una teoría de álgebra de vértices cuántica de manera que las álgebras cuánticas afines puedan ser canónicamente asociadas con álgebras de vértices cuánticas (ver [FJ]; cf. [EFK]). Como una solución de este problema, en una serie de artículos Li (ver [Li1], [Li2], [Li3]) ha desarrollado algunas teorías de álgebras de vértices cuánticas débiles. Por otra parte en [BK], presentan una relación clara entre el rol de las álgebras conformes en la noción de álgebras de vertice débiles (no cuánticas).

El objetivo de nuestro trabajo en progreso es extraer de la noción de álgebra de vértice débil cuántica la correspondiente estructura de álgebra conforme en el sentido de [BK], para poder definir algebra conforme cuántica, establecer su relación con lo que los físicos tienen como ejemplos de álgebras conformes cuánticas para $N = 2, 3, 4$, para luego estudiar su estructura y teoría de representaciones siguiendo la analogía con la teoría clásica.

En esta charla introduciremos las nociones de álgebra de vértices y de Γ-álgebra de vértices, dónde Γ es algún subgrupo de $\mathbb{C}^\star$. Las Γ álgebras de vértices no son más que álgebras de vértices ordinarias munidas de una estructura de Γ-módulo satisfaciendo ciertas condiciones de compatibilidad. Como parte de los avances del trabajo, mostraremos que una Γ álgebra de vértices es lo mismo que tener una estructura de H-pseudoálgebra la cual es esquivalente a una Γ-conformal álgebra (cf.[GKK]) más un álgebra con derivaciones con cierta compatibilidad adicional entres esas dos estructuras. Finalmente introduciremos la noción de quantum vertex álgebras y contaremos los pasos para lograr extraer la definición de álgebra coforme cuántica.

Referencias

[BK] B. Bakalov and V. Kac, Field algebras, *Internat. Math. Res. Notices* 3 (2003) 123-159.

[EFK] P. Etingof, I. Frenkel, and A. Kirillov, Jr., *Lectures on Representation Theory and Knizhnik-Zamolodchikov Equations*, Math. Surveys and Monographs, V. 58, AMS, 1998.

[FJ] I. Frenkel and N. Jing, Vertex operator representations of quantum affine algebras, *Proc. Natl. Acad. Sci.* USA 85 (1988) 9373-9377.

[GKK] M. Golenisheva-kutuzova and V.Kac, Γ-conformal algebras *J. Math.Phys.* 39(1998), 2290-2305.

[Li1] H.-S. Li, Nonlocal vertex algebras generated by formal vertex operators, *Selecta Math. (New Series)* 11 (2005) 349-397.

[Li2] H.-S. Li, A new construction of vertex algebras and quasi modules for vertex algebras, *Advances in Math.* 202 (2006) 232-286.

[Li3] H.-S. Li, Constructing quantum vertex algebras, *International Journal of Mathematics* 17 (2006) 441-476.

Geodésicas luz en variedades Lorentzianas compactas.

Pablo Raúl Montenegro

FCEIA – UNR

En este trabajo se investigan familias de variedades Lorentzianas compactas. Se caracterizaron en ellas cuándo las geodésicas luz son periódicas. Para construir dichas variedades se utilizaron los grupos osciladores y $SL(2, \mathbb{R})$ dotados con una métrica Lorentziana bi-invariante, se estudiaron sus geodésicas y sus cocientes por látices cocompactos.

G_2-estructuras solitones en álgebras de Lie nilpotentes.

Marina Nicolini

FaMAF – UNC
CIEM – CONICET

Una forma de evolucionar una G_2-estructura en una variedad diferenciable de dimensión 7, con el objeto de estudiar la existencia de métricas con holonomía G_2, es el flujo Laplaciano, introducido por Bryant. En el año 2015 investigamos la existencia de G_2-estructuras cerradas que son solitones de Laplace en grupos de Lie nilpotentes. Probamos que de las doce álgebras de Lie que admiten una G_2-estructura cerrada (introducidas por Fernández, Fino y Manero), las primeras siete admiten un solitón de Laplace. Más aún, una de ellas admite una familia monoparamétrica de solitones algebraicos no homotéticos 2 a 2. Además, en cuatro de las doce álgebras, el solitón encontrado resulta semialgebraico pero no algebraico. Todo esto muestra diferencias sustanciales entre los solitones de Laplace y los de Ricci. Otra clase distinguida de G_2-estructuras cerradas son las extremally Ricci pinched (ERP). En el corriente año, estamos en la búsqueda de ejemplos de estructuras ERP, como así también de estructuras que maximicen la funcional $\frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{Ric}^2}$, que mide cuán lejos está una métrica de ser Einstein.

Algebras de Lie con estructuras Vaisman.

Marcos Origlia

FaMAF – UNC
CIEM – CONICET

Una métrica Vaisman en una variedad diferenciable es una métrica localmente conforme Kähler tal que la forma de Lee es paralela respecto a la conexión de Levi-Civita. En esta charla estudiaremos las álgebra de Lie unimodulares solubles con estructuras Vaisman y daremos varias relaciones con otras estructuras geométricas o algebraicas, como las estructuras sasakianas, las coKähler y las LSA (left-symmetric algebras).

Acciones, geometría y modelos topológicos.

Gabriela Ovando

FCEIA – UNR
CONICET

A través de ejemplos, intentaremos mostrar espacios topológicos como construcciones geométricas. Las ideas se remontan a Thurston y su conjetura de geometrización. Intentaremos ver el modelo Nil.

Álgebras de Heisenberg asociadas a álgebras de división y las álgebras de Lie simples.

Mauro Subils

FCEIA – UNR
CONICET

A partir de las álgebras de división reales se define naturalmente una familia de álgebras de Lie dos pasos nilpotentes que generalizan las álgebras de Heisenberg, a las que denominamos de tipo $\mathfrak{h}(\mathbb{A})$. Probamos que toda álgebra de Lie simple real (salvo los casos degenerados de $so(n,1)$) tiene una única subálgebra parabólica, salvo conjugación, cuyo nilradical es de tipo $\mathfrak{h}(\mathbb{A})$.

Aplicamos este resultado al estudio de los automorfismos infinitesimales de geometrías asociadas a distribuciones fat (que generalizan las distribuciones de contacto).

Este es un trabajo conjunto con Aroldo Kaplan.

Un problema de evolución en el grupo de Heisenberg

Raúl E. Vidal

FAMAF – UNC
CIEM – CONICET

En la charla se hablara de problemas de evolución no locales. Se presentara problemas definidos en el conjunto $\mathbb{R}^n$ nombrando los principales resultados conocidos. Luego se planteara el siguiente problema de evolución en el grupo de Heisenberg

$$u_t(z,s,t) = J * u(z,s,t) - u(z,s,t),$$

donde $*$ denota el producto de convolución y J satisface hipótesis adecuadas. Respecto al problema de Cauchy mostraremos que el comportamiento asintótico de la solución es el mismo que el de la solución del problema parabólico respecto al laplaciano fraccionario del grupo de Heisenberg. Para obtener este resultado se usa la transformada esférica relativa al par de Gelfand $(U(n),\mathbb{H}_n)$. Finalmente se muestra que la solución del problema de Dirichlet, rescalado apropiadamente, converge uniformemente a la solución del problema de Dirichlet correspondiente a la ecuación del calor del grupo de Heisenberg.

Los resultados expuestos han sido aceptados recientemente para su publicación en: NDEA-D-17-00114R1, DOI: 10.1007/s00030-017-0479-1, ver: Nonlocal heat equations in the Heisenberg group. arXiv preprint arXiv:1703.09323.